



## MODELO DE ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDO APLICADO À ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE DE PAREDE DE BLOCO DE CONCRETO ESTRUTURAL

**Márcio Augusto Roma Buzar**

**Marcos Henrique Ritter de Gregorio**

**Leonardo S. P. Inojosa**

buzar@unb.br

marcos@ritteregregorio.com.br

leonardo@inojosa.com.br

PPG-FAU, Programa de Pós Graduação, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de Brasília, Campus Universitário Darcy Ribeiro, Brasília - CEP 70910-900 , DF, Brasil,  
<http://www.unb.br>

**Resumo.** Neste trabalho, busca-se obter a carga máxima de colapso plástico de uma parede de bloco de concreto estrutural. Faz-se simulações considerando a retirada de material resistente como, por exemplo, a colocação de porta ou abertura motivada por modificações no projeto arquitetônico.

Considera-se a análise plástica limite por meio da programação matemática considerando o critério de Mohr Coulomb, assumindo-se a hipótese básica de plasticidade associada. Utiliza-se uma representação poliédrica da superfície de escoamento estudando-se a convergência dos resultados em relação ao número de planos adotados na referida representação. Adota-se a formulação de elementos finitos híbridos.

Exemplos numéricos são mostrados para o caso de paredes de bloco de concreto estrutural, considerando diferentes malhas de elementos finitos e os resultados obtidos são comparados com os de análise analítica existente no critério adotado pela norma brasileira de projeto de estrutura em bloco de concreto estrutural NBR 10837.

**Palavras-chave:** alvenaria estrutural, bloco de concreto estrutural, elementos finitos híbridos, análise plástica limite

## 1 INTRODUÇÃO

A seguinte análise objetiva simular uma intervenção que é bastante possível de ocorrer sem supervisão técnica em edificações em alvenaria estrutural: a remoção de parte de uma parede portante durante uma reforma de apartamento.

Propõe-se analisar quais são as consequências estruturais à parede devido a esta remoção, por meio de simulação numérica baseada em softwares de análise plástica limite, que empregam modelos de elementos finitos híbrido. A superfície de plastificação adotada é a de Mohr Coulomb modificada, resistindo somente à compressão. O valor da carga de ruína ou o fator de carga de colapso é obtido por processo de otimização por meio da programação matemática linear disponível no software “LINDO”. Este processo determina um fator de carga de colapso para um conjunto de pontos da estrutura, que atinge o valor máximo de resistência até formar um mecanismo de colapso plástico (ruína). A hipótese é que existe uma reserva de resistência suficiente nos blocos, que garante a capacidade resistente da parede após a intervenção. Salienta-se, contudo, que esta abordagem utiliza os softwares apenas como ferramenta de análise, não se propondo a explorar os modelos matemáticos envolvidos. Remete-se a trabalhos como Buzar (2004) ou Santos da Silva (2003) para obter informações mais aprofundadas sobre este tema.

## 2 FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS HÍBRIDOS

A seguir descreve-se resumidamente a teoria de elementos finitos baseados em funcionais híbridos. Os elementos finitos híbridos têm um ou mais campos primários que são definidos somente na interface ou contorno do elemento. Princípios variacionais híbridos representam uma importante extensão dos princípios clássicos da mecânica. Esta extensão constitui uma tentativa de fortalecer os modelos de elementos finitos.

O primeiro elemento híbrido era bastante limitado por não ser capaz de tratar problemas não lineares e dinâmicos. Entretanto, tais limitações foram gradualmente superadas com o entendimento e evolução dos conceitos básicos. A adoção de elementos finitos híbridos neste trabalho foi motivada pelo fato do elemento finito híbrido quadrilátero de quatro nós ser provavelmente o elemento de quatro nós mais preciso em uma ampla gama de problemas de tensão e deformação plana (Zienkiewicz & Taylor 1995).

### 2.1 Equação de equilíbrio

O funcional utilizado na obtenção do elemento híbrido é obtido pela soma de outros dois funcionais que contêm o funcional no interior (domínio) e o potencial de interface (contorno). A expressão (1) representa o funcional utilizado em elementos híbridos (Felippa, 2000), (Pian & Tong, 1969):

$$\pi_C^u(\sigma_{ij}, u_i) = -U_C + W_d = -\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} D_{ijkl} \sigma_{kl} dV + \int_S u_i \sigma_{ij} n_j dS - \int_{St} u_i \hat{t}_i dSt \quad (1)$$

onde  $\pi_c^u(\sigma_{ij}, u_i)$  é o funcional de campo múltiplo híbrido ( $\square$  e  $\dot{u}$ );  $U_c$  é a energia complementar em termos das tensões;  $W_c$  é o trabalho potencial;  $\square$  é o tensor de tensões;  $D$  é o tensor da relação constitutiva;  $u$  é o vetor de deslocamentos;  $V$  é o volume;  $S$  é a superfície;  $S_t$  é a parte da superfície onde existem carregamentos e  $\hat{t}$  é o vetor de forças de superfície prescritas.

O funcional apresentado na expressão (1) pode ser aplicado na construção do elemento finito híbrido da Figura 1.

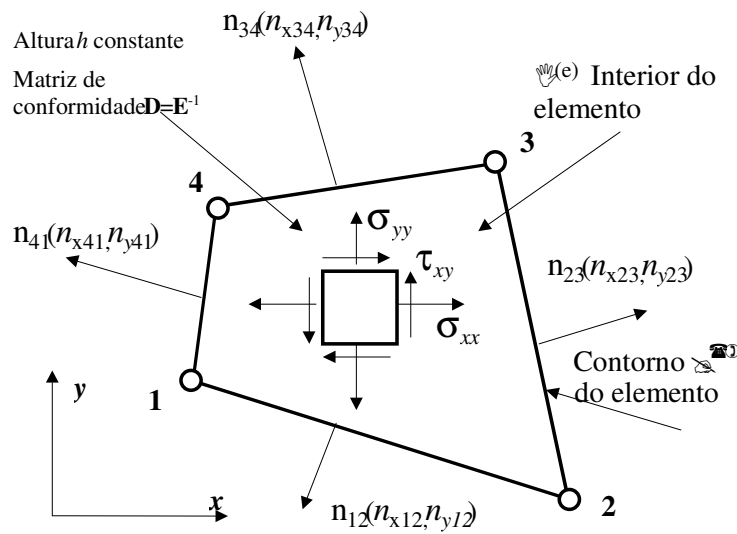


Figura 1. Elemento quadrilátero bilinear de tensão plana (Felippa, 2000).

Emprega-se para a interpolação das tensões a relação

$$\sigma = \Psi \alpha \quad (2)$$

sendo  $\Psi$  a matriz que interpola as tensões, e  $\alpha$  são os parâmetros de tensões.

O funcional da expressão (1) pode ser escrito para todo o domínio e contorno do problema discretizado como

$$\pi_c^u = \alpha^T G \dot{u} - P^T \dot{u} \quad (3)$$

onde  $G$  é dado por

$$\mathbf{G} = \int_{\Gamma(e)} \mathbf{T}^T \boldsymbol{\Phi} d\Gamma \quad (4)$$

sendo  $\dot{\mathbf{u}}$  as taxas de deslocamentos no problema discretizado,  $\mathbf{P}$  o vetor de cargas nodais e  $\boldsymbol{\Phi}$  é a matriz das funções de forma para o elemento linear de contorno descrito na superfície do elemento finito híbrido quadrilátero de tensões planas.

Fazendo  $\pi_c^d$  estacionário em relação aos deslocamentos, tem-se

$$\frac{\partial \pi_c^d}{\partial \dot{\mathbf{u}}} = \mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{P}^T = 0 \quad (5)$$

ou

$$\mathbf{G}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}^T \quad (6)$$

A expressão (6) é uma relação de equilíbrio entre as cargas nodais  $\mathbf{P}$  e os parâmetros de tensão  $\boldsymbol{\alpha}$ , sendo  $\mathbf{G}$  uma matriz de equilíbrio em termos dos parâmetros de tensão, integrada no contorno do elemento finito híbrido.

### 3 CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA DE MOHR-COULOMB

No presente trabalho, assume-se como válido o critério de Mohr-Coulomb. Neste critério a tensão de cisalhamento  $\tau$  na ruptura ou escoamento do material é função de propriedades do material, como a coesão e o ângulo de atrito, e varia linearmente com a tensão normal atuante (Chen, 1982). Assim as forças de cisalhamento crescem com o incremento das tensões normais ao plano de ruptura, ou seja,

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \quad (7)$$

onde  $\tau$  é a tensão de cisalhamento no plano de ruptura,  $c$  é a coesão do material e  $\phi$  é o ângulo de atrito interno.

O critério de Mohr-Coulomb ignora o efeito da tensão principal intermediária e a equação pode ser escrita na forma das tensões principais como

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi + c \cos \phi \quad (8)$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  são a maior e a menor tensões principais, respectivamente.

Na forma geral, o critério de ruptura de Mohr-Coulomb no espaço de tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_{xy}$  é dado por

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - [2c \cos \phi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \phi]^2 \leq 0 \quad (9)$$

A utilização da expressão (9) na análise plástica limite leva à obtenção de um sistema governante na forma de um problema de programação não linear (PNL). Esta expressão pode ser linearizada de modo a se trabalhar com sistemas governantes na forma de problemas de programação matemática linear (PLs). Utilizando uma superfície de ruptura linearizada (Santos *et al*, 1999a), (Santos *et al*, 1999b) as condições de resistência, em um ponto qualquer do corpo, são expressas como

$$\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} \leq \sigma^* \quad (10)$$

onde  $\mathbf{n}$  é a matriz de normalidade; e  $\sigma^*$  é o vetor das capacidades plásticas.

As condições de resistência expressas em (10) são função da tensão  $\boldsymbol{\sigma}$ . Assim, para que seja possível a montagem do problema de programação linear equivalente ao critério estático da análise plástica limite é necessário substituir (5) em (10), chegando-se a expressão (11), mais detalhe pode ser encontrado em (Buzar *et al*, 2003).

$$\mathbf{n}^T \Psi \mathbf{a} \leq \sigma^* \quad (11)$$

## 4 TEOREMA ESTÁTICO DA ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE

Com a relação de equilíbrio (6) e as condições de resistência (11), obtém-se o problema de programação linear associado ao critério estático como

$$\text{Maximizar} \quad \lambda \quad (12a)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{n}^T \Psi \\ \mathbf{P}_v & -\mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \sigma^* \\ \mathbf{P}_f \end{bmatrix} \quad (12b)$$

No presente trabalho, os problemas de programação linear associados ao teorema estático, obtidos por meio da representação poliédrica da superfície de ruptura em hiperplanos (Sahlit, 1992), (Sahlit, 1993), (Smith, 1990) foram resolvidos utilizando-se o software comercial LINDO (Linear Interactive Discrete Optimizer) (Sschage, 1991).

## 5 EXEMPLO EMPREGADO NA ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE DE PAREDE DE BLOCO DE CONCRETO ESTRUTURAL

Utilizou-se para o exemplo, um edifício já construído de quatro pavimentos, com quatro apartamentos de dois quartos por andar. Optou-se por esta tipologia por ela ser muito freqüente em conjuntos habitacionais populares, onde a possibilidade de uma intervenção sem orientação técnica é mais passível de ocorrer. A intervenção está assinalada na figura 2.

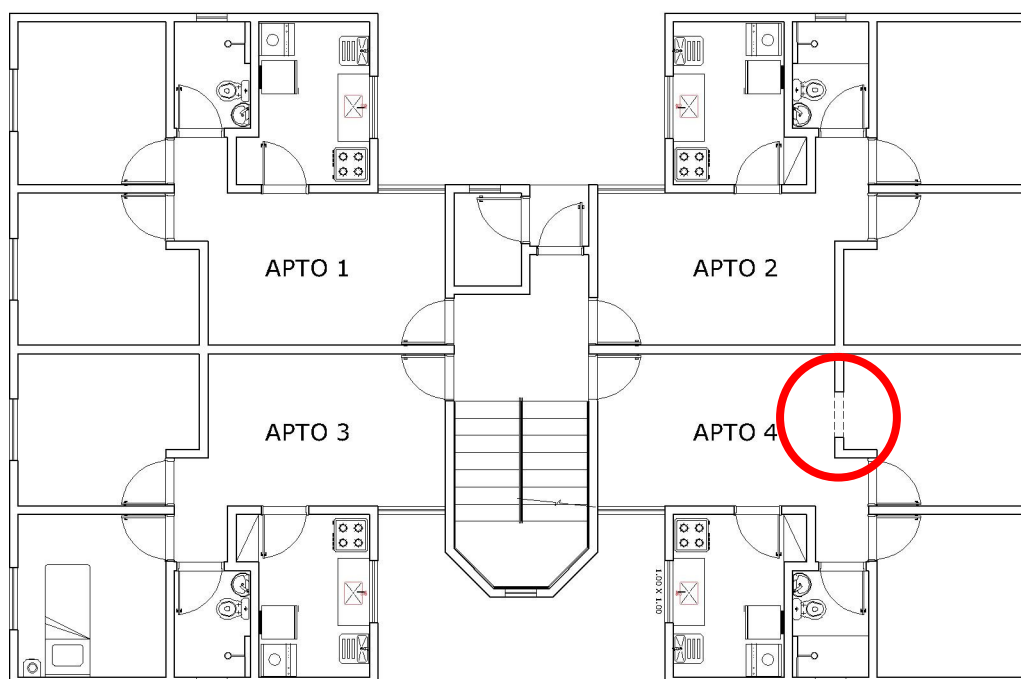
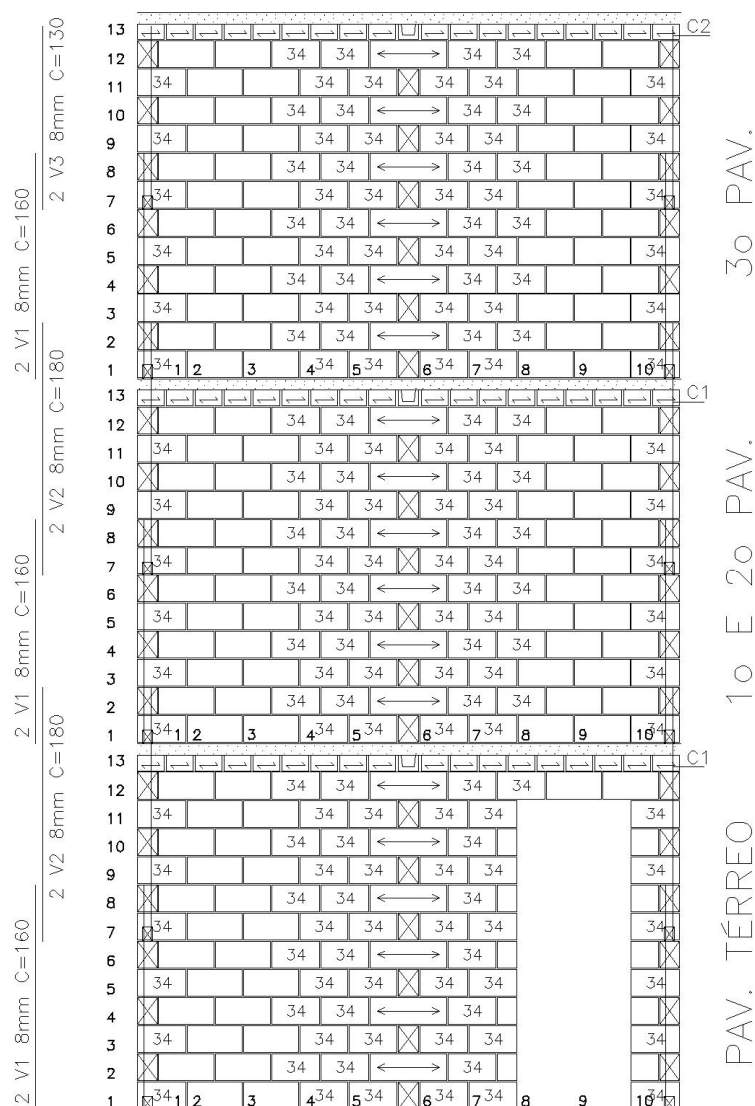


Figura 2. Intervenção em apartamento de edifício padrão popular. Fonte: Ilustração do autor.

Simula-se aqui a modificação da posição da porta do quarto, com a intenção de conectá-lo diretamente à sala, em uma possível alteração de seu uso. Assumiu-se que esta intervenção ocorreu no pavimento térreo, a fim de simular a situação mais desfavorável.

A elevação detalhada das paredes com a nova abertura está ilustrada na figura 3.



**Figura 3. Elevação detalhada da parede onde ocorreu a intervenção. Fonte: Ilustração do autor.**

O estudo foi feito simplificadamente, considerando a parede sem problemas de desaprumo e tratando-a isoladamente das paredes adjacentes. Na análise numérica, despreza-se o efeito de flambagem lateral. O levantamento da carga está demonstrado na memória de cálculo a seguir:

## CARREGAMENTO DA LAJE

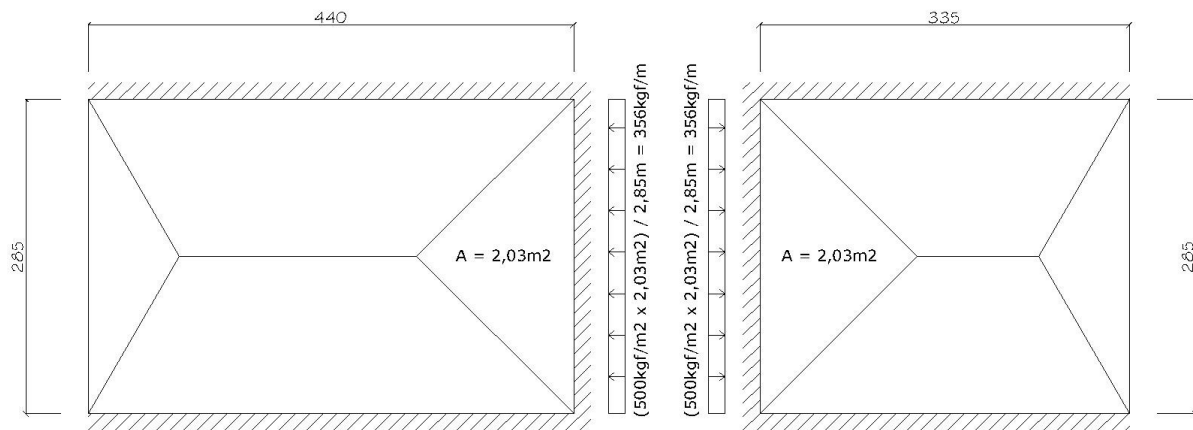
Peso próprio:  $0,10\text{m} \times 2.500\text{kgf/m}^3 = 250\text{kgf/m}^2$

Revestimento:  $100\text{kgf/m}^2$

Sobrecarga (apartamento):  $150\text{kgf/m}^2$

**TOTAL:  $500\text{kgf/m}^2$**

A figura 4 ilustra o direcionamento das cargas:

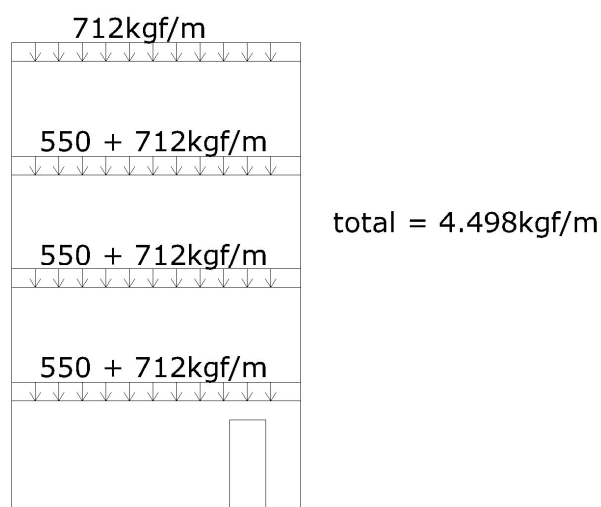


CARREGAMENTO DA LAJE SOBRE A PAREDE EM ANÁLISE =  $712\text{kgf/m}$

**Figura 4. Direcionamento das cargas sobre a parede em análise. Fonte: Ilustração do autor.**

Convenciona-se o peso específico do bloco vazado de concreto como  $1.400\text{ kgf/m}^3$ . A parede em análise, de 15cm de espessura, 2,85m de comprimento e 2,52m de altura resulta em um peso próprio de aproximadamente  $550\text{ kgf/m}$ .

A figura 5 ilustra as cargas acumuladas por pavimento:



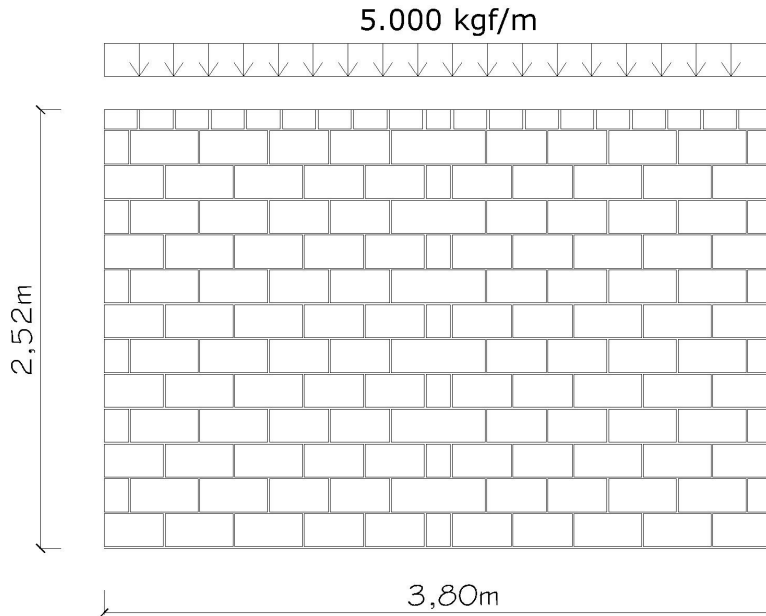
**Figura 5. Cargas acumuladas sobre a parede em análise. Fonte: Ilustração do autor.**



Estabeleceu-se, então, como referência o valor de **5.000 kgf/m** de carga acumulada total sobre a parede analisada.

O dimensionamento desta parede foi feito baseado no roteiro estabelecido por Ramalho e Corrêa (2003) e segue desenvolvido na memória de cálculo abaixo, considerando a parede isolada, conforme figura 6.

#### DIMENSIONAMENTO DE PAREDE À COMPRESSÃO



**Figura 6. Esquema estático da parede em análise submetida à compressão. Fonte: Ilustração do autor.**

Teste do índice de esbeltez ( $\lambda_f$ ), de acordo com a NBR 10837:

$$\lambda_f = \frac{h}{t} = \frac{2,52m}{0,14m} = 18 \leq 20 \quad (13)$$

Sendo:  $\lambda_f$  = índice de esbeltez; h = altura da parede; t = espessura da parede.

Cálculo da Tensão Atuante sobre a parede ( *falv,c* ):

$$f_{alv,c} = \frac{5.000kgf / m \times 3,80m}{3,80m \times 0,14m} = 35.714,28kgf/m^2 \quad (14)$$

Sendo: 5.000kgf/m = carga acumulada total sobre a parede analisada; 3,80m = comprimento da parede; 0,14m = espessura da parede.

Cálculo da Tensão Resistente ( $\bar{f}_{alv,c}$ ):

$$\bar{f}_{alv,c} = 0,20 \times fp \times R \quad R = 1 - \left( \frac{h}{40 \times t} \right)^3 \quad (15)$$

Considerando

fp = resistência da parede; R = fator de redução da resistência associado à esbeltez; h = altura da parede; t = espessura da parede,

$$\bar{f}_{alv,c} = 0,20 \times fp \times \left[ 1 - \left( \frac{2,52m}{40 \times 0,14m} \right)^3 \right] = 0,182 fp \quad (16)$$

Igualando as resistências:

$$0,182 \times fp = 35.714,28kgf / m^2 \therefore$$

$$fp = 196.232,33kgf / m^2$$

Convertendo a unidade, encontra-se o valor de 1,96MPa.

Sabe-se que a união dos blocos por argamassa resulta em perda de monoliticidade e, para isso, deve-se utilizar um fator de segurança conhecido como eficiência do prisma que deve ser arbitrado entre 0,5 e 0,7.

Utilizando a eficiência do prisma = 0,7 obtém-se:

$$\frac{1,96MPa}{0,7} = 2,8MPa$$

Como a menor resistência permitida por norma para blocos estruturais é de **4,5MPa**, este deverá ser o valor adotado para os blocos da parede em análise.

Em seguida, para determinar a máxima carga de colapso, utilizou-se da análise plástica limite de elementos finitos quadriláteros de quatro nós (Buzar, 2004). Assim, a geometria da parede analisada foi subdividida em 400 elementos, configurando um total de 441 nós. A figura 7 ilustra esta subdivisão:

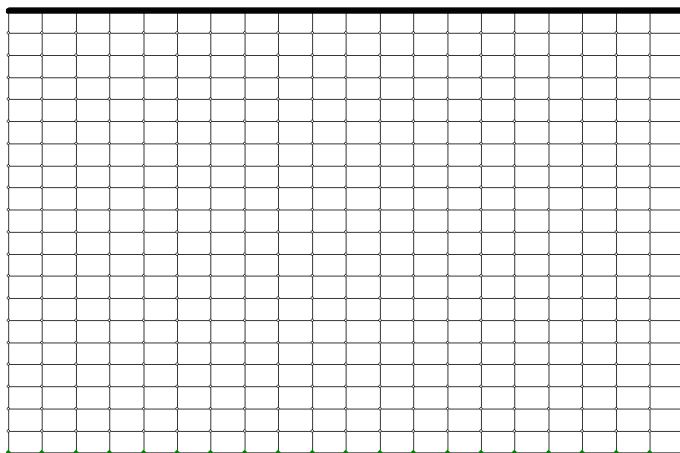


Figura 7. Subdivisão da parede em malha. Fonte: Ilustração do autor.

Estes dados foram introduzidos em um software do tipo APLEF (Análise Plástica Limite de Elementos Finitos) com a intenção de obter o fator de carga de colapso (Buzar, 2004). O fator de carga de colapso é a medida de quantas vezes a carga atuante no problema em análise deve ser aumentada a fim de levar a estrutura ao colapso. O valor encontrado, nesta situação, foi de  $\lambda = 12,14$ . Isto significa que, apenas um valor 12,14 vezes superior à carga real aplicada ( $5.000\text{kgf/m} \times 12,14 = 60.700\text{kgf/m}$ ) seria capaz de levar esta parede à ruína. Para a extensão de 3,8m desta parede, o carregamento distribuído configuraria uma força de **230.660kgf**.

A segunda situação simula a parede com intervenção e retirada de material. Trata-se da instalação de uma porta de 80 x 210 cm, conforme mostra a figura 8. Nesta situação, a parede em análise foi subdividida em 1088 elementos, configurando 1185 nós.

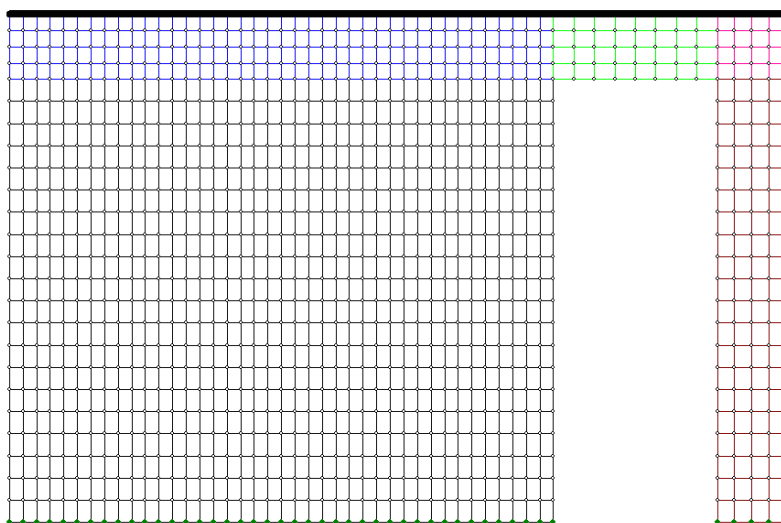


Figura 8. Subdivisão da parede com intervenção em malha. Fonte: Ilustração do autor.

O fator de carga de colapso obtido, nesta situação, foi de  $\lambda = 8,46$ . Isto significa que, apenas um valor 8,46 vezes superior à carga real aplicada ( $5.000\text{kgf/m} \times 8,46 = 42.300\text{kgf/m}$ )

seria capaz de levar esta parede ao colapso, mesmo após a retirada de material equivalente ao vão de uma porta. Para a extensão de 3,8m desta parede, o carregamento distribuído configuraria uma força de **160.740kgf**.

Utilizando-se da fórmula da tensão oriunda da resistência do material e sabendo-se que os blocos utilizados são de resistência 4,5MPa (450.000kgf/m<sup>2</sup>) pode-se obter, simplificadoamente, o valor da força necessária para ocorrer o esmagamento nos dois casos:

**1) Parede sem abertura:**

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \rightarrow \quad 450.000\text{kgf/m}^2 = \frac{F}{0,14\text{m} \times 3,8\text{m}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F = 239.400\text{kgf}}$$

Sendo:

$\sigma$  = Tensão; F = Força total aplicada; A = Área da seção transversal da parede.

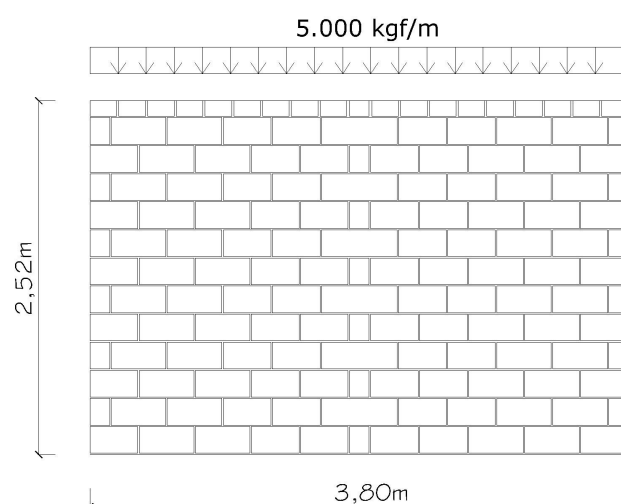
**2) Parede com abertura** (descontando-se 0,80m do vão da porta):

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \rightarrow \quad 450.000\text{kgf/m}^2 = \frac{F}{0,14\text{m} \times 3,0\text{m}} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F = 189.000\text{kgf}}$$

Observa-se que os valores obtidos pela resistência do material e pelo exemplo numérico são bastante próximos.

Na figura o seguinte estudo analisa os resultados obtidos da força necessária para ocorrer o colapso por meio da resistência do material e por meio do cálculo de estado plano de tensões, considerando a análise plástica limite, e compara com a força solicitante existente.

**SITUAÇÃO 1 – PAREDE SEM ABERTURA:**



**Figura 9. Parede de alvenaria estrutural sem remoção de material.**

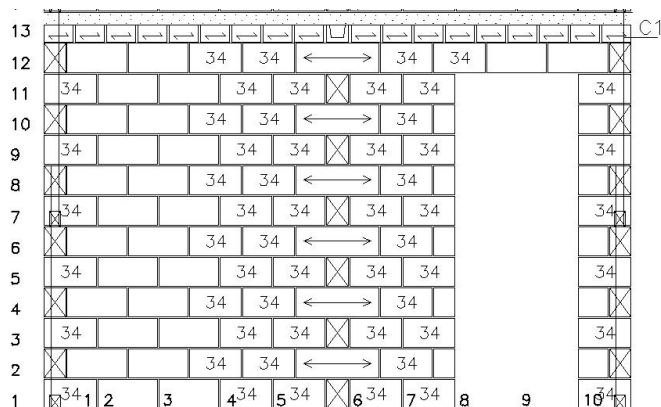
PELA RESISTÊNCIA DO BLOCO → **F = 239.400kgf**

PELA ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE → **F = 230.660kgf**

PELA SOLICITAÇÃO EXISTENTE → **F = 5.000kgf/m x 3,8m = 19.000kgf**

Observa-se na figura 10, que a força solicitante sobre a parede é da ordem de 8% do valor necessário para atingir o colapso.

#### SITUAÇÃO 2 – PAREDE COM ABERTURA:



**Figura 10. Parede de alvenaria estrutural com remoção de material – colocação da porta.**

PELA RESISTÊNCIA DO BLOCO → **F = 189.000kgf**

PELA ANÁLISE PLÁSTICA LIMITE → **F = 160.740kgf**

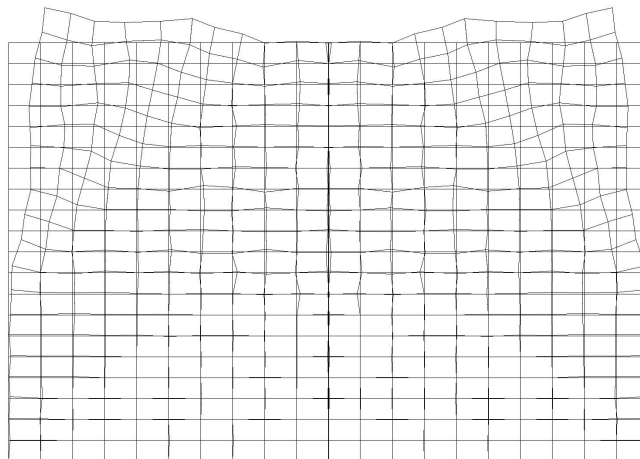
PELA SOLICITAÇÃO EXISTENTE → **F = 5.000kgf/m x 3,8m = 19.000kgf**

Neste caso, a força solicitante sobre a parede é da ordem de 11% do valor necessário para atingir o colapso.

O resultado final indica que, para prédios de até quatro pavimentos, mesmo utilizando-se o mínimo de resistência estabelecido por norma (4,5MPa), a possibilidade de ocorrência de colapso da estrutura em caso de intervenções pontuais é remota, salvo os casos de perda de estabilidade global da estrutura.

Na figura 11 e 12, apresentam-se, as ações da carga máxima de ruína nas duas situações a fim de analisar o mecanismo de ruptura obtido.

A ruptura da parede submetida à carga máxima na situação 1 (sem intervenção) segue ilustrada na figura 11:

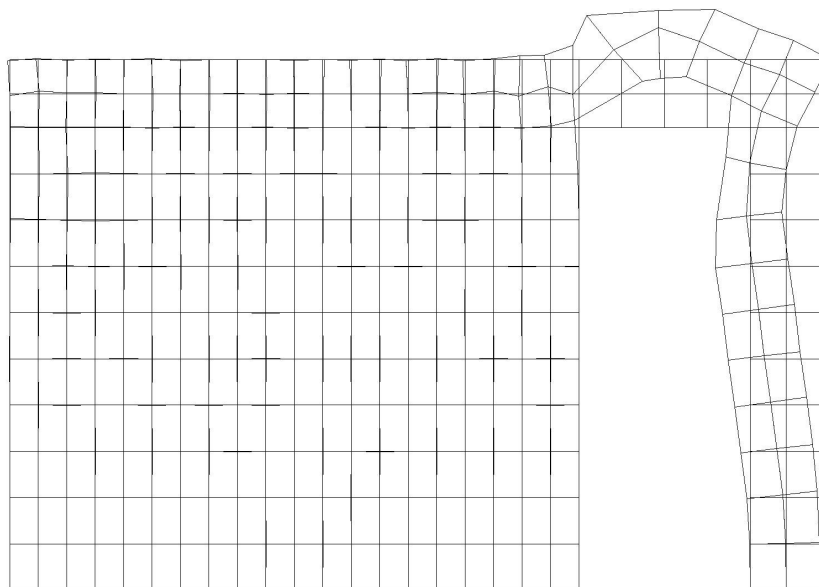


**Figura 11. Mecanismo de ruptura da parede submetida à carga máxima na situação 1 (sem intervenção).**

**Fonte: Ilustração do autor.**

Ressalta-se que nesta simulação não se levou em consideração a existência da verga de graute de resistência igual a 9MPa armada com vergalhões de 10mm que existe neste projeto. A existência desta verga certamente ajuda a combater eventual ruína demonstrada na figura 11.

Na situação 2 (parede com retirada de material para instalação de porta), o mecanismo de ruptura da parede submetida à carga máxima segue ilustrada na figura 12:



**Figura 12. Mecanismo de ruptura da parede submetida à carga máxima na situação 2 (remoção de material). Fonte: Ilustração do autor.**

Pode-se depreender da figura que o rompimento ocorre nos dois pontos fragilizados da parede: a guarnição para instalação do marco e alisar (boneca) e acima do vão da porta.

Estes dois pontos de ruína podem ser facilmente enrijecidos com vergalhões e graute a fim de melhor combater este eventual colapso.

Outra possibilidade seria o aumento da dimensão da guarnição que, desta forma, ganharia mais robustez e deixaria de funcionar como um pilar esbelto.

### ***Conclusões***

Em linhas gerais, pode-se concluir da análise que, em se tratando de prédios de quatro pavimentos (que é a configuração mais comum em alvenaria estrutural no Brasil), pequenas intervenções pontuais nas paredes não representam nenhum perigo para a estabilidade global da estrutura. Verifica-se, portanto, uma reserva de resistência nos blocos suficientemente grande para manter a estrutura intacta em casos de pequenas demolições. Assim, efetuar reformas em edificações em alvenaria estrutural é um procedimento perfeitamente possível, desde que orientado por um profissional habilitado. Ressalta-se, no entanto, a importância de se utilizar blocos com o devido controle tecnológico e dentro da normatização vigente.

A adoção dos modelos híbrido de elementos finitos no presente trabalho, foi motivada pelo fato destes modelos apresentarem na sua formulação as equações de equilíbrio e compatibilidade de forma independente, o que possibilita a montagem dos PLs estático e cinemático para realizar a análise plástica limite por meio da programação matemática. Uma motivação adicional é que o elemento finito híbrido quadrilátero de quatro nós é provavelmente o elemento bilinear mais preciso para uma ampla gama de problemas de tensões e deformações planas (Zienkiewicz & Taylor, 1995).

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Associação Brasileira de Normas Técnicas. Cálculo de alvenaria estrutural de blocos vazados de concreto. NBR 10837, Rio de Janeiro, 1989.
- Buzar, M. A. R., *Modelos híbridos de elementos finitos e de contorno aplicados a análise plástica limite em engenharia*. Tese (Doutorado). Universidade de Brasília, 2004.
- Buzar, M.A.R., Partridge, P. W., Sahlit, C.L., Santos Da Silva, L. & Farias, M. M. (2003). *Hybrid Finite Elements for the Plastic Limit Analysis of Geotechnical Problems*. VII International Conference on Computational Plasticity (COMPLAS). CIMNE, Barcelona.
- Chen, W. F. (1982). *Platicity in Reinforced Concrete*, McGraw-Hill, New York.
- De Gregorio, M. H. R. *Edificações em alvenaria estrutural: uso e desenvolvimento do sistema construtivo e contribuições ao projeto arquitetônico*. Dissertação (Mestrado). Universidade de Brasília, 2010.
- Felippa, C. A. (2000). *Advanced Finite Element Methods* (ASEN 5367) – Department of Aerospace Engineering Structures, University of Colorado at Boulder, Colorado.
- Pian, T. H. H. & Sumihara K. (1984.). *Rational Aproach for Assumed Stress Finite Elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 20, 1685-1895.
- Ramalho, M. A.; Corrêa, M. R. S. *Projetos de edifícios de alvenaria estrutural*. São Paulo: Editora Pini, 2003.
- Sahlit, C. L. (1993). *Análise Elastoplástica das Estruturas*, Apostilas do Curso de Mestrado em Engenharia Civil, UnB, Brasília.
- Sahlit, C. L (1992). *Mathematical Programming Methods for Dynamically Loaded Rigid-Plastic Framed Structures*, PhD. Thesis, Departament of Civil Engineering, Imperial College, University of London, London.
- Santos da Silva, L. *Análise limite em geotecnia através da aplicação de elementos finitos mistos e híbridos*. Tese (Doutorado). Universidade de Brasília, 2003.
- Santos da Silva, L., Farias, M. M. & Sahlit, C. L. (1999b). *Plastic Limit Analysis in Geotechnics using the Finite Element Method plus Linear and Non Linear Mathematical Programming*, Proceedings of the Seventh International Symposium on Numerical Models in Geomechanics (VII NUMOG), Graz., 215-220.
- Santos da Silva, L., Sahlit, C. L. & Farias, M. M. (1999a). *Aplicação da Análise Plástica Limite aos Métodos Probabilísticos em Geotecnia*. Anais do XX Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais para Engenharia (XX CILAMCE), São Paulo.
- Schrage L. (1991). *LINDO User's Manual – Release 5.0*. The Scientific Press, San Francisco.
- Smith, D. L. (1990). *Plastic Limit Analysis, Mathematical Programming Methods in Structural Plasticity*, ed. D. Lloyd Smith (ed.), Springer-Verlag, Vienna, chapter 5, 61-82.
- Zienkiewicz, O. C. & Taylor R. L. (1995). *El Método de los Elementos Finitos I e II*, 4 Ed., McGraw-Hill, Madrid.